1. (ref. 1) Résoudre les equations différentielles suivantes :
b) $(1-t^2)y'+ty=t\log(t)-t+1/t$
g) $ty'+|y|=3(t^2-a^2)$

2. (ref. 2) Soit $a<0$. Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ admettant une limite L au point 0 . Montrer que toutes les solutions de l'équation $ty'+ay=f(t)$ ont une limite finie en 0.

3. (ref. 5) Soit $a\neq 0$ et f de période T , continue sur $\mathbf{R}$. Montrer que l'equation différentielle $y'+ay=f(t)$ a une unique solution périodique.

4. (ref. 7) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'equation différentielle $(ty'-y)(ty'-2y-2t^4)=0$.

5. (ref. 9) Soit $E=C(\mathbf{R})$, et $D\colon E\to E$, $D(f)(t)=f'(t)+tf(t)$. Trouver le noyau de D^n.

6. (ref. 10) Résoudre les systèmes : $a)x'=2x+y+e^t$, $y'=2y+z+2e^-t$, $z'=2z$

7. (ref. 12) Résoudre les equations différentielles suivantes :
b) $y''-2y'+2y=t\cos(t)\operatorname{ch}(t)$
g) $t(t+1)y''+(t+2)y'-y=0$.

8. (ref. 16) Soit l'equation différentielle $y''+p(t)y'+q(t)y=0$. Condition pour qu'il existe deux solutions du type $f(t)$ et $tf(t)$. Résoudre $y''+2ty'+(t^2+1)y=t\exp(-t^2/2)$.

9. (ref. 17) Trouver les fonctions f de classe C^2 telles que $f''(t)=f(-t)$.

10. (ref. 18) Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Résoudre sur I l'equation différentielle $yy''=0$.

11. (ref. 19) Soit l'equation différentielle $y''+q(t)y=0$.
a) Montrer qu'une solution non identiquement nulle n'a que des zéros isolés.
b) Soit q_1 et q_2 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que $q_2\geq q_1$. Soit u une solution (non nulle) de $y''+q_1(t)y=0$ et v une solution de $y''+q_2(t)y=0$. Soit a et b deux zéros consécutifs de u (cf. a) . Montrer que soit v/u est constante sur $]a,b[$, soit v s'annule sur $]a,b[$.
c) Soit q de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue telle que $q\leq 0$. Majorer le nombre de zéros d'une solution de $y''+q(t)y=0$.
d) Soit q de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue telle que $0<a^2\leq q(t)\leq b^2$. Soit u une solution de $y''+q(t)y=0$. Montrer que la distance de deux zéros consécutifs de u est au plus de π/a et au moins de π/b.

12. (ref. 21) ¶ Soit f de $\mathbf{R}$ dans$\mathbf{R}$ de classe C^2 telle que $f(t)+f'(t)+f''(t)$ admette la limite 0 en $+\infty$. Que peut on dire de f?

13. (ref. 23) Soit l'equation différentielle $y''+\exp(-t^2)y=\sin(t)$ et f une solution bornée sur $[1,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f^2$ converge. Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$.

14. (ref. 25) ¶ Soit $q:[0,+\infty[\to\mathbf{R}$ de classe C^1, tendant vers 0 en $+\infty$, telle que $\displaystyle\int_0^{+} |q'(t)|\,dt$ converge. Montrer que toute solution de $y''+(1+q(t))y=0$ est bornée sur $[0,+\infty[$.

15. (ref. 27) ¶ ¶ Soit $p,q:[0,+[\to\mathbf{R}$ continues. On suppose que q est bornée et que pour toute solution de l'equation différentielle $y''+p(t)y=0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)^2\,dt$ converge. Montrer qu'il en est de même pour toute solution de $y''+(p(t)+q(t))y=0$.

16. (ref. 29) Quelle condition doivent vérifier les valeurs propres de la matrice A pour que le système d'équation $X'=AX+f(t)$ admette une solution périodique de période T pour toute fonction continue f.

17. (ref. 30) ¶ a) Soit $f,\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ continues telles que

$$\forall t\geq t_0,\quad \varphi(t)\leq k+\int_{t_0}^t f(s)\varphi(s)\,ds$$

Montrer que $\forall t \geq t_o$, $\varphi(t) \leq k \exp(\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$.

b) Soit $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$ telle que toute solution de $Y' = $ AY soit bornée. Que peut-on dire des valeurs propres de A? Soit $B : \mathbf{R} \to M_{\mathbb{R}}(n)$ continue telle que $\int_0^{+\infty} \|B(t)\|\, dt$ converge. Montrer que toute solution de $Y' = (A + B(t))Y$ est bornée.

18. (ref. 34) a) Soit $a(t)$ et $b(t)$ des fonctions C^1 sur $\mathbf{R}^+$ et u une solution de $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ (1). On suppose que u ne s'annule pas, soit $t_0 \geq 0$ et $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$, $v(t) = u(t) \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-A(s)}}{u(s)^2} ds$. Montrer que v est solution de (1) et que (u, v) est libre.

b) Soit $u : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^{+*}$ de classe C^2, $v(t) = u(t) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{u(s)^2} ds$ et $w(t) = v(t) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{v(s)^2} ds$. Montrer que w est combinaison linéaire de u et v.

19. (ref. 35) ¶ Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ de classe C^1 telle que $\forall t, \quad g(t) \geq k > -1$ et $\int_0^{+\infty} g'(t)dt$ converge absolument. On pose $\gamma(t) = \int_0^{t} \sqrt{1 + g(u)}du$ et soit (1) $x'' + (1 + g(t))x = 0$.

a) exprimer les solutions lorsque $g(t) = k$.

b) On introduit $R(t)$ et $\varphi(t)$ de classe C^1 par $x(t) = R(t)\sin(\varphi(t) + \gamma(t))$ et $x'(t) = R(t)\gamma'(t)\cos(\varphi(t) + \gamma(t))$. Trouver une équation différentielle dont φ est solution.

c) Montrer l'existence de $R(t)$ et $\varphi(t)$ et étudier leurs limites en $+\infty$.

20. (ref. Centrale 91-) On s'intéresse à des applications dérivables f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(1) = 1$ et $\forall x > 0, \quad f'(x) = m(f(x) + f(\frac{1}{x}))$ (où m est donné dans $\mathbf{R}^*$).

a) Montrer l'existence et l'unicité de f (on utilisera une équation différentielle).

b) Etudier succinctement f.

21. (ref. Centrale 92-) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f + f'$ tend vers ℓ en $+\infty$, $\ell \in \mathbf{R}$. Montrer que f tend vers ℓ en $+\infty$.

22. (ref. Centrale 92-) a) Trouver la solution f de l'équation différentielle (E) $y' = 2xy + 1$ qui vérifie $f(0) = 0$

b) En donner le développement en série entière

c) Calculer la somme :$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$. Donner une autre méthode pour le calcul de cette somme.

23. (ref. ENS93-) **-L.-** Montrer que f définie par $f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1 + x^2} dx$ est solution d'une équation différentielle. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

24. (ref. GOX91-) On considère l'équation différentielle (E) $y'' + p(x)y = 0$ où p est une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

a) Soit y une solution non nulle de (E). Montrer que l'ensemble X des zéros de y n'a pas de point d'accumulation.

b) Soit $X^+ = \{x \in X; x \geq 0\}$. Montrer que l'on peut ordonner les éléments de X^+ en une suite croissante.

25. (ref. GOX92-) Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que les intégrales $\int_0^{+\infty} ta(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} b(t)dt$ convergent absolument. On considère l'équation (E) $x'' + a(t)x = b(t)$. Soit x une solution de (E). Montrer que x a une limite en $+\infty$.

26. (ref. POX93-) Soit $A : \mathbf{R} \to M_2(\mathbf{C})$ une application continue et Y_1, Y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle $Y'(t) = A(t)Y(t)$. On suppose que A est 2π périodique. Montrer qu'il existe $B \in M_2(\mathbf{C})$ telle que l'application $\psi : t \mapsto [Y_1(t), Y_2(t)] \exp(tB)$ soit 2π périodique.

27. (ref. GOXP'93-) Soit a et b des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, y une solution de l'équation: $(E) \quad y'-a(t)y=b(t)$, et soit g telle que: $g'-ag-b$ soit partout négative. Montrer que l'on a : $g \leq y$.

28. (ref. Mines91-) Trouver les f de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f'(x)+f(-x)=xe^x$.

29. (ref. Mines91-) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tendant vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ et $\omega > 0$. Montrer que l'équation $y''-\omega^2 y=f$ a exactement une solution bornée sur $\mathbf{R}$.

30. (ref. Mines92-) $(x^2+1)y''+2xy'+\dfrac{y}{1+x^2}=1+x^2$. Effectuer le changement de variable $x=\tan\theta$ puis résoudre.

31. (ref. Mines92-) Montrer que toutes les solutions de $y''+e^x y=0$ sont bornées sur $\mathbf{R}^+$.

32. (ref. Mines93-) Soit u une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ et f une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$. On suppose qu'il existe une constante A telle que, pour tout x de $\mathbf{R}_+$,

$$u(x) \leq A+\int_0^x f(t)\,u(t)\,dt$$

Montrer que

$$u(x) \leq \; A\, e^{\int_0^x f(t)\,dt}$$

Soit (E) l'équation différentielle $y''+y(1+g(t))=0$ où g est une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(t)|\,dt$ converge. Montrer que toute solution de (E) est bornée.

33. (ref. POX92-) Soit $a>0$. Trouver les fonctions f dérivables sur $]0,+\infty[$ et vérifiant $f'(x)=f(a^2/x)$.

Equations différentielles non linéaires

34. (ref. 1) Intégrer les équations différentielles:
b) $t^2+y'^2-2t-2y'=0$

35. (ref. 2) Intégrer les équations différentielles:
c) $yy'+te^{t+y}=0$

36. (ref. 3) Intégrer les équations différentielles:
b) $t+y=(y'-1)^2/(y'+1)^2$
d) $(ty^2+1)y'=y^2$

37. (ref. 4) Intégrer les équations différentielles: b) $tyy'-y^2=(t+y)^2 e^{-y/t}$

38. (ref. 5) Intégrer les équations différentielles:
b) $(y-ty')\sqrt{t^2+y^2}=a\sqrt{1+y'^2}$

39. (ref. 7) Intégrer les équations différentielles:
b) $(y-y')^3=(y+y')^2$

40. (ref. 8) En paramétrant par $p=y'$ intégrer les équations différentielles:
a) $(1+y'^2)t=y'^3$
b)$y=t+y'-\log(y')$

41. (ref. 9) Intégrer les équations différentielles:
a) $y''+y'^3(\sin y-t)=0$ (poser $t=f(y)$).

42. (ref. 12) Soit f une application de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et μ_0 une racine isolée de $f(\mu)=\mu$. Soit l'équation différentielle $(e) y'=f(y/t)$.

a) Montrer que si $f'(\mu_0)<1$, aucune solution de (e) n'est tangente à la solution $y=\mu_0 t$ en $(0,0)$.

b) Montrer que si $f'(\mu_o)>1$, il existe par contre une infinité de solutions tangentes à cette solution en (0,0).

43. (ref. 13) Soit l'équation différentielle $y'=(y^2+1)^{1/3}/(1+t^4)^{1/3}$. Montrer que toute solution a deux asymptotes horizontales.

44. (ref. 14) ¶ Etudier les solutions de l'équation $y'' + \sin(y) = 0$. On introduira pour cela la fonction $E = y'^2/2 - \cos(y)$ et on cherchera en particulier à montrer que certaines solutions sont périodiques.

45. (ref. 17) ¶ Soit le système $dx/dt = x(1-y)$ et $dy/dt = y(x-1)$. Soit $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ une solution avec $x(0)y(O) > 0$ .Soit D_1:$x > 1, y > 1$, D_2:$O < x < 1, y > 1$, $D_3 : 0 < x < 1, O < y < 1$ et $D_4 : x > 1, 0 < y < 1$ quatre parties du plan. On suppose que $(x(0), y(0)) \in D_1$. Montrer que φ traverse succesivement D_1, D_2, D_3 et D_4. Allure de la courbe?

46. (ref. 19) ¶ On considère l'équation différentielle $y' = \lambda + \dfrac{y^2}{1+t^2}$. On étudie les solutions sur $\mathbf{R}^+$ telles que $y(0) = 0$.

a) On suppose $0 \leq \lambda \leq \dfrac{1}{4}$. Montrer que $\exists k > 0 \forall \lambda, \forall t \geq 0, \quad k \geq \lambda + \dfrac{k^2t^2}{1+t^2}$. En déduire que la solution maximale est définie sur $[0, +\infty[$.

b) On suppose $\lambda > \dfrac{1}{4}$. En posant $t = \operatorname{sh}\theta$ et $y = z \operatorname{ch}\theta$, montrer que la solution maximale est définie sur $[0, \omega[$ avec $\operatorname{sh}(\dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}) < \omega < sh(\dfrac{2\pi}{\sqrt{4\lambda - 1}})$.

47. (ref. 22) Soit $a > 0$ et l'équation différentielle $x'' + ax' + b \sin x = 0$. En posant $u = x'^2 - 2b \cos x$, montrer qu'une solution maximale est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

48. (ref. ENS93-) **-P.-** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, et x une solution de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ telle que $x(0) \geq 0$. On suppose que:

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f(t, 0) \geq 0$$

Montrer: $\quad \forall t \in \mathbf{R}_+ \quad x(t) \geq 0$.

49. (ref. GOX93-) Etudier l'équation différentielle $y' = \sqrt{|y|} + a$, $a > 0$ étant fixé.

50. (ref. Mines93-) Trouver les applications f dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que pour tout x réel on ait : $f'(x) + f(-x) = e^x$.

51. (ref. Mines93-) Soit u une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ et f une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$. On suppose qu'il existe une constante A telle que, pour tout x de $\mathbf{R}_+$,

$$u(x) \leq A + \int_0^x f(t)\, u(t)\, dt$$

Montrer que

$$u(x) \leq \ A\, e^{\int_0^x f(t)\, dt}$$

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + y(1 + g(t)) = 0$ où g est une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt$ converge. Montrer que toute solution de (E) est bornée.

Géométrie et equations différentielles

52. (ref. 2) Trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes de la nappe
b) $x = \cos u - 2v \sin u$, $y = \sin u + 2v \cos u$,$z = 2v$

53. (ref. 3) Trajectoire orthogonale de la famille des cercles tracés sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, passant par le pôle nord et tangents à l'équateur.

54. (ref. 6) Lignes de plus grande pente relativement à Oz de
a) $z = \cos x + cosy$
c) nappe conique de sommet O dont les lignes de niveau sont des cercles.
e) $z = xy$